

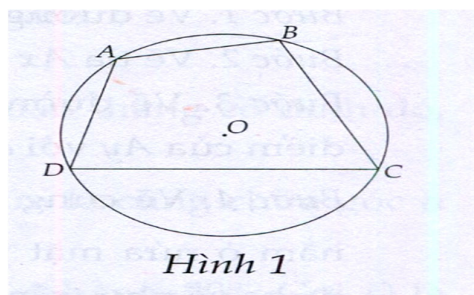
TỨ GIÁC NỘI TIẾP

A. TRỌNG TÂM CƠ BẢN CẦN ĐẠT

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa

- Tứ giác nội tiếp đường tròn là tứ giác có bốn đỉnh nằm trên đường tròn đó.
- Trong Hình 1, tứ giác ABCD nội tiếp (O) và (O) ngoại tiếp tứ giác ABCD.



Hình 1

2. Định lý

- Trong một tứ giác nội tiếp, tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° .
- Nếu một tứ giác có tổng số đo hai góc đối diện bằng 180° thì tứ giác đó nội tiếp được đường tròn.

3. Một số dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm cố định (mà ta có thể xác định được). Điểm đó là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

Chú ý: Trong các hình đã học thì hình chữ nhật, hình vuông, hình thang cân nội tiếp được đường tròn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Chứng minh tứ giác nội tiếp

Phương pháp giải: Để chứng minh tứ giác nội tiếp, ta có thể sử dụng một trong các cách sau:

Cách 1. Chứng minh tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180° .

Cách 2. Chứng minh tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

Cách 3. Chứng minh tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện.

Cách 4. Tìm được một điểm cách đều 4 đỉnh của tứ giác.

1.1. Cho tam giác ABC nhọn, đường cao BM và CN cắt nhau tại H . Chứng minh các tứ giác $AMHN$ và $BNMC$ là những tứ giác nội tiếp.

1.2. Cho điểm A nằm ngoài đường tròn (O) , qua A kẻ hai tiếp tuyến AB và AC với đường tròn (O) (B, C là tiếp điểm). Chứng minh tứ giác $ABOC$ là tứ giác nội tiếp.

2.1. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp (O) , M là điểm chính giữa của cung AB . Nối M với D , M với C cắt AB lần lượt ở E và P . Chứng minh $PEDC$ là tứ giác nội tiếp.

2.2. Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . M là điểm thuộc đường tròn. Vẽ MH vuông góc với BC tại H , vẽ MI vuông góc với AC . Chứng minh $MIHC$ là tứ giác nội tiếp.

Dạng 2. Sử dụng tứ giác nội tiếp để chứng minh các góc bằng nhau, các đoạn thẳng bằng nhau, các đường thẳng song song hoặc đồng quy, các tam giác đồng dạng...

Phương pháp: Sử dụng tính chất của tứ giác nội tiếp.

3.1. Cho đường tròn (O) đường kính AB . Gọi H là điểm nằm giữa O và B . Kẻ dây CD vuông góc với AB tại H . Trên cung nhỏ AC lấy điểm E , kẻ $CK \perp AE$ tại K . Đường thẳng DE cắt CK tại F . Chứng minh:

a) Tứ giác $AECF$ là tứ giác nội tiếp;

b) $AH \cdot AB = AD^2$;

c) Tam giác ACE là tam giác cân.

3.2. Cho nửa (O) đường kính AB . Lấy $M \in OA$ (M không trùng O và A). Qua M vẽ đường thẳng d vuông góc với AB . Trên d lấy N sao cho $ON > R$. Nối NB cắt (O) tại C . Kẻ tiếp tuyến NE với (O) (E là tiếp điểm, E và A cùng thuộc nửa mặt phẳng bờ d). Chứng minh:

a) Bốn điểm O, E, M, N cùng thuộc một đường tròn;

b) $NE^2 = NC \cdot NB$;

c) $\widehat{NEH} = \widehat{NME}$ (H là giao điểm của AC và d);

d) NF là tiếp tuyến (O) với F là giao điểm của HE và (O) .

4.1. Cho đường tròn (O) đường kính AB , gọi I là trung điểm của OA , dây CD vuông góc với AB tại I . Lấy K tùy ý trên cung BC nhỏ, AK cắt CD tại H .

a) Chứng minh tứ giác $BIHK$ là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh $AHAK$ có giá trị không phụ thuộc vị trí điểm K .

c) Kẻ $DN \perp CB$, $DM \perp AC$. Chứng minh các đường thẳng MN, AB, CD đồng quy.

11. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn. Đường tròn $(O; R)$ có đường kính BC cắt AB, AC lần lượt tại F và E ; BE cắt CF tại H .

a) Chứng minh tứ giác $AFHE$ nội tiếp. Từ đó, xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác này.

b) Tia AH cắt BC tại D . Chứng minh $HE.HB = 2HD.HI$

c) Chứng minh bốn điểm D, E, I, F cùng nằm trên một đường tròn.

12. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây CD cố định. Điểm M thuộc tia đối của tia CD . Qua M kẻ hai tiếp tuyến MA, MB tới đường tròn (A thuộc cung lớn CD). Gọi I là trung điểm CD . Nối BI cắt đường tròn tại E (E khác B). Nối OM cắt AB tại H .

a) Chứng minh AE song song CD .

b) Tìm vị trí của M để $MA \perp MB$.

c) Chứng minh HB là phân giác của CHD .

13. Cho đường tròn tâm O bán kính R , hai điểm C và D thuộc đường tròn, B là điểm chính giữa của cung nhỏ CD . Kẻ đường kính BA ; trên tia đối của tia AB lấy điểm S . Nối S với C cắt (O) tại M , MD cắt AB tại K , MB cắt AC tại H . Chứng minh:

a) $\widehat{BMD} = \widehat{BAC}$. Từ đó suy ra tứ giác $AMHK$ nội tiếp;

b) HK song song CD .

14. Cho hình vuông $ABCD$. E di động trên đoạn CD (E khác C, D). Tia AE cắt đường thẳng BC tại F , tia Ax vuông góc với AE tại A cắt đường thẳng DC tại K . Chứng minh:

a) $\widehat{CAF} = \widehat{CKF}$;

b) Tam giác KAF vuông cân;

c) Đường thẳng BD đi qua trung điểm I của KF ;

d) Tứ giác $IMCF$ nội tiếp với M là giao điểm của BD và AE .

15. Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp (O) , M là điểm thuộc cung nhỏ AC . Vẽ MH vuông góc với BC tại H , MI vuông góc AC tại I .

a) Chứng minh $\widehat{IHM} = \widehat{ICM}$.

b) Đường thẳng HI cắt đường thẳng AB tại K . Chứng minh MK vuông góc với BK .

c) Chứng minh tam giác MIH đồng dạng với tam giác MAB .

d) Gọi E là trung điểm của IH và F là trung điểm AB . Chứng minh tứ giác $KMEF$ nội tiếp từ đó suy ra ME vuông góc với EF.

HƯỚNG DẪN GIẢI VÀ ĐÁP SỐ

1.1. Xét tứ giác AMHN có:

$$\widehat{AMH} + \widehat{ANH} = 90^\circ + 90^\circ + 180^\circ$$

$\Rightarrow$ ĐPCM.

Xét tứ giác BNMC có:

$$\widehat{BNC} = \widehat{BMC} = 90^\circ \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

1.2. HS tự chứng minh

2.1. Ta có: $\widehat{AED} = \frac{1}{2} (\text{sđ } \widehat{AD} + \text{sđ } \widehat{MB})$

$$= \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{DM} = \widehat{MCD}. \Rightarrow \widehat{DEP} + \widehat{PCD} = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ PEDC nội tiếp.

2.2. Ta có: $\widehat{MIC} = \widehat{CHM} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ MIHC nội tiếp (hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc vuông)

3.1. a) Học sinh tự chứng minh

b) $\triangle ADB$ vuông tại D, có đường cao DH $\Rightarrow AD^2 = AH \cdot AB$

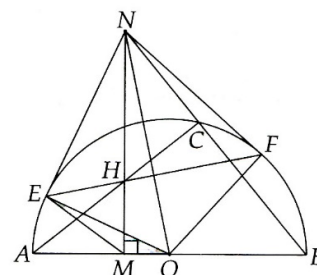
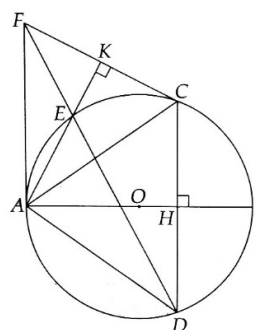
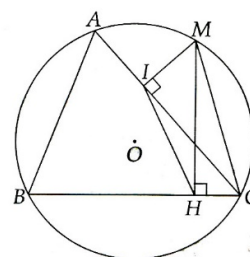
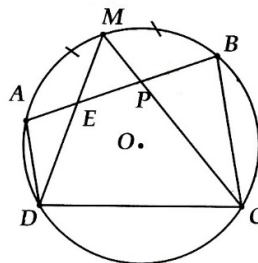
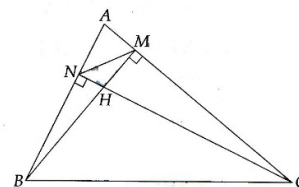
c) $\widehat{EAC} = \widehat{EDC} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{EC}$, $\widehat{EAC} = \widehat{KHC}$

(Tứ giác AKCH nội tiếp)

$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{KHC} \Rightarrow DF \parallel HK$ (H là trung điểm DC nên K là trung điểm FC)

$\Rightarrow$ ĐPCM.

3.1. a) Học sinh tự chứng minh



$$b) \widehat{NEC} = \widehat{CBE} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{CE}$$

$$\Rightarrow \triangle NEC \sim \triangle NBE \text{ (g.g)} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$c) \triangle NCH \sim \triangle NMB \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow NC.NB = NH.NM = NE^2$$

$$\triangle NEH \sim \triangle NME \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{EMN}$$

$$d) \widehat{EMN} = \widehat{EON} \text{ (Tứ giác NEMO nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \widehat{NEH} = \widehat{NOE} \Rightarrow EH \perp NO$$

$$\Rightarrow \triangle OEF \text{ cân tại O có ON là phân giác} \Rightarrow \widehat{EON} = \widehat{NOF}$$

$$\Rightarrow \triangle NEO = \triangle NFO \text{ vậy } \widehat{NFO} = \widehat{NEO} = 90^\circ \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$4.1. a) \widehat{HIB} = \widehat{HKB} = 180^\circ$$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác BIHK nội tiếp}$$

$$b) \text{ Chứng minh được: } \triangle AHI \sim \triangle ABK \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow AH.AK = AI.AB = R^2 \text{ (không đổi)}$$

$$c) \text{ Chứng minh được MCND là hình chữ nhật từ đó} \Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$4.2. a) \text{ Chú ý: } \widehat{AMO} = \widehat{AIO} = \widehat{ANO} = 90^\circ$$

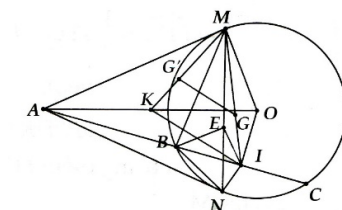
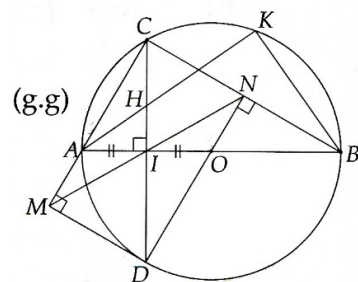
$$b) \widehat{AMB} = \widehat{MCB} = \frac{1}{2} \text{sđ } \widehat{MB}$$

$$\Rightarrow \triangle AMB \sim \triangle ACM \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \text{ĐPCM.}$$

$$c) \triangle AMN \text{ nội tiếp}$$

$$\Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{AIN}$$



$$BE \parallel AM \Rightarrow \widehat{AMN} = \widehat{BEN}$$

$$\Rightarrow \widehat{BEN} = \widehat{AIN} \Rightarrow \text{Tứ giác BEIN nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BIE} = \widehat{BNM}$$

Chứng minh được: $\widehat{BIE} = \widehat{BCM} \Rightarrow IE \parallel CM$.

d) G là trọng tâm $\Delta MBC \Rightarrow G \in MI$.

Gọi K là trung điểm AO $\Rightarrow MK = IK = \frac{1}{2} AO$.

Từ G kẻ $GG' \parallel IK$ ($G' \in MK$)

$$\Rightarrow \frac{GG'}{IK} = \frac{MG}{MI} = \frac{MG'}{MK} = \frac{2}{3} IK = \frac{1}{3} AO \text{ không đổi (1)}$$

$MG' = \frac{2}{3} MK \Rightarrow G'$ cố định (2). Từ (1) và (2) có G thuộc (

$G'; \frac{1}{3} AO$).

5. Học sinh tự chứng minh.

6. Học sinh tự chứng minh.

7. Học sinh tự chứng minh.

8. Gọi ý: Chứng minh BEFC là hình thang cân

9. Gọi ý: $\widehat{AFE} = \widehat{AHE}$ (tính chất hình chữ nhật và $\widehat{AHE} = \widehat{ABH}$ (cùng phụ $\widehat{BHE}$))

10. a) Học sinh tự chứng minh.

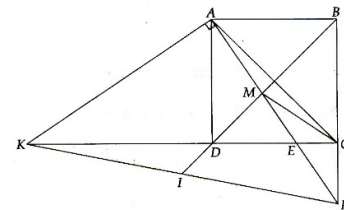
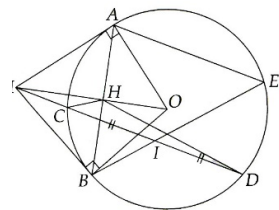
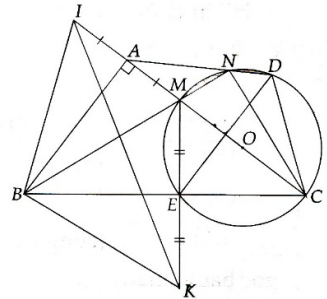
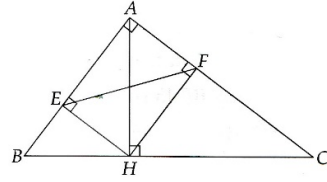
b) Học sinh tự chứng minh.

c) Học sinh tự chứng minh.

d) Chú ý:

$$\widehat{BIA} = \widehat{BMA}, \widehat{BMC} = \widehat{BKC}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác BICK nội tiếp đường tròn (T), mà (T) cũng là đường tròn ngoại tiếp ΔBIK . Trong (T), dây BC không đổi



mà đường kính của (T) $\geq BC$ nên đường kính nhỏ nhất bằng BC.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \widehat{BIC} = 90^\circ \Rightarrow I \equiv A \Rightarrow M \equiv A$

11. HS tự làm.

12. a) HS tự chứng minh.

b) $OM = R\sqrt{2}$

c) $MC \cdot MD = MA^2 = MH \cdot MO$

$\Rightarrow MC \cdot MD = MH \cdot MO$

$\Rightarrow \triangle MHC \sim \triangle MDO$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{MHC} = \widehat{MDO} \Rightarrow$ Tứ giác CHOD nội tiếp

Chứng minh được: $\widehat{MHC} = \widehat{OHD}$

$\Rightarrow \widehat{CHB} = \widehat{BHD}$ (cùng phụ hai góc bằng nhau)

13. HS tự chứng minh.

14. a) HS tự chứng minh.

b) HS tự chứng minh.

c) Tứ giác ACFK nội tiếp (i) với I là trung điểm của KF $\Rightarrow$ BD là trung trực AC phải đi qua I.

d) HS tự chứng minh.

15. HS tự chứng minh.

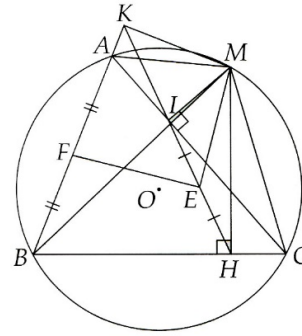
b) HS tự chứng minh.

c) HS tự chứng minh.

d) $\triangle MIH \sim \triangle MAB$

$\Rightarrow \frac{MH}{MB} = \frac{IH}{AB} = \frac{2EH}{2FB} = \frac{EH}{FB}$

$\Rightarrow \triangle MHE \sim \triangle MBF$



$\Rightarrow \widehat{MFA} = \widehat{MEK}$ (cùng bù với hai góc bằng nhau)

$\Rightarrow KMEF$ nội tiếp $\Rightarrow \widehat{MEF} = 90^\circ$.

B. NÂNG CAO PHÁT TRIỂN TƯ DUY

Bài 1. Cho hình hành ABCD có đỉnh D nằm trên đường tròn đường kính AB. Kẻ BN và DM cùng vuông góc với đường chéo AC. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác CBMD là tứ giác nội tiếp.

b) Khi điểm D di động trên đường tròn thì $\widehat{BMD} + \widehat{BCD}$ không đổi.

c) $DB \cdot DC = DN \cdot AC$.

Bài 2. Cho hai đường tròn (O) và (O') cắt nhau tại A và B. Các tiếp tuyến tại A của đường tròn (O) và (O') cắt đường tròn (O') và (O) theo thứ tự tại C và D. Gọi P và Q lần lượt là trung điểm của các dây AC và AD. Chứng minh rằng:

a) Hai tam giác ABD và CBA đồng dạng.

b) $\widehat{BQD} = \widehat{APB}$.

c) Tứ giác APBQ nội tiếp.

Bài 3. Cho hai vòng tròn (O_1) và (O_2) tiếp xúc ngoài nhau tại điểm T. Hai vòng tròn này nằm trong vòng tròn (O_3) và tiếp xúc với (O_3) tương ứng tại M và N. Tiếp tuyến chung tại T của (O_1) và (O_2) cắt (O_3) tại P. PM cắt vòng tròn (O_1) tại điểm thứ hai A và MN cắt (O_1) tại điểm thứ hai B. PN cắt vòng tròn (O_2) tại điểm thứ hai D và MN cắt (O_2) tại điểm thứ hai C.

a) Chứng minh rằng tứ giác ABCD là tứ giác nội tiếp.

b) Chứng minh rằng các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

Bài 4. Từ điểm A nằm ngoài đường tròn tâm O kẻ hai tiếp tuyến AB và AC (B và C là các tiếp điểm). Gọi M là điểm bất kì trên cung nhỏ BC của đường tròn (O) (M khác B và C). Tiếp tuyến qua M cắt AB và AC tại E và F. Đường thẳng BC cắt OE và OF ở P và Q. Chứng minh rằng:

a) Tứ giác OBEQ, OCFP là các tứ giác nội tiếp.

b) Tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.

c) Tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Bài 5. Cho tam giác ABC, D và E là các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh AB và AC.

Chứng minh đường phân giác trong của góc B, đường trung bình của tam giác song song với cạnh AB và đường thẳng DE đồng quy.

Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB cố định và đường kính CD quay quanh điểm O. Các đường thẳng AC và AD cắt tiếp tuyến tại B của đường tròn theo thứ tự tại E và F.

1. Chứng minh rằng tứ giác CDFE nội tiếp đường tròn.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE. Chứng minh rằng điểm I di động trên đường thẳng cố định khi đường kính CD quay quanh điểm O.

Bài 7. Cho tam giác ABC vuông tại A và D là một điểm trên cạnh AC (Khác với A và C). Vẽ đường tròn tâm D tiếp xúc với BC tại E. Từ B kẻ tiếp tuyến thứ hai BF với đường tròn (D) . Gọi M là trung điểm của BC, N là giao điểm của BF và AM. Chứng minh năm điểm A, B, E, D, F cùng nằm trên một đường tròn và $AN = NF$.

Bài 8. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D; E là các tiếp điểm và E nằm trong đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M, N khác với điểm). Đường thẳng DE cắt MN tại I. Chứng minh rằng:

a) $MI \cdot BE = BI \cdot AE$.

b) Khi điểm C thay đổi thì đường DE luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 9. Cho đường tròn $(O; R)$ và dây AB cố định, $AB = R\sqrt{2}$. Điểm P di động trên dây AB (P khác A và B). Gọi $(C; R_1)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với đường tròn $(O; R)$ tại A, $(D; R_2)$ là đường tròn đi qua P và tiếp xúc với $(O; R)$ tại B. Hai đường tròn $(C; R_1)$ và $(D; R_2)$ cắt nhau tại điểm thứ hai M.

a) Trong trường hợp P không trùng với trung điểm dây AB, chứng minh $OM \parallel CD$ và 4 điểm C, D, O, M cùng thuộc một đường tròn;

b) Chứng minh khi P di động trên dây AB thì điểm M di động trên đường tròn cố định và đường thẳng MP luôn đi qua một điểm cố định N;

c) Tìm vị trí của P để tích $PM.PN$ lớn nhất? Diện tích tam giác AMB lớn nhất.

Bài 10. Cho tam giác ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O) có AD là phân giác góc $\widehat{BAC}$, tia AD cắt đường tròn tại điểm E (E khác A). Kẻ đường kính EF của đường tròn (O) . Gọi P là một điểm nằm giữa A và D . Tia FP cắt đường tròn (O) tại Q khác F . Đường thẳng qua P vuông góc với AD cắt CA , AB lần lượt tại M , N .

a) Chứng minh rằng các tứ giác $PQBN$, $PQCM$ là tứ giác nội tiếp.

b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O) . Chứng minh rằng QM và PB cũng cắt nhau tại một điểm thuộc đường tròn (O) .

Bài 11. Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp $(O; R)$ có $AB < AC$. Vẽ 3 đường cao AD , BE , CF của tam giác ABC cắt nhau tại H , AD cắt (O) tại K và cắt EF tại I .

a) Chứng minh rằng: BC là trung trực của HK và $IF.IE = IH.IA$;

b) Chứng minh rằng : Các tứ giác $DHEC$, $BFIK$ nội tiếp được;

c) Chứng minh rằng: $\frac{KC}{AC} + \frac{BK}{BA} = \frac{EF}{AI}$;

d) Đường thẳng qua E song song với AD cắt BK tại M . Chứng minh rằng: 3 điểm F , D , M thẳng hàng;

Bài 12. Cho tam giác ABC nhọn với $AB < AC$ có AD là đường phân giác. Đường thẳng qua C song song với AD cắt đường trung trực của AC tại E . Đường thẳng qua B song song với AD cắt đường trung trực của AB tại F .

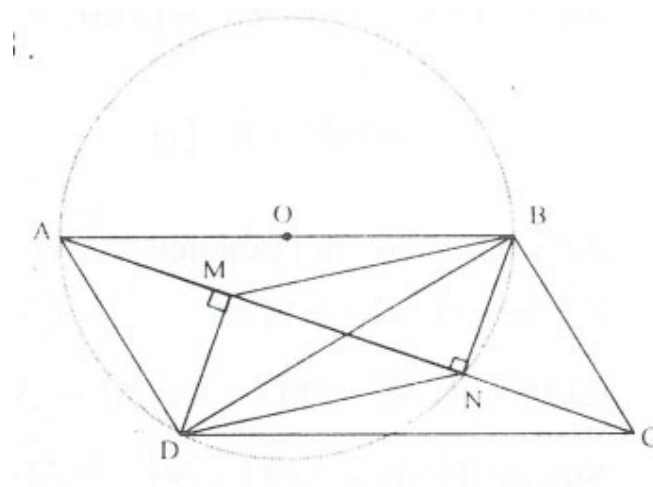
a) Chứng minh rằng tam giác ABF đồng dạng với tam giác ACE .

b) Chứng minh rằng các đường thẳng BE , CF , AD đồng quy tại một điểm, gọi điểm đó là G .

c) Đường thẳng qua G song song với AE cắt đường thẳng BF tại Q . Đường thẳng QE cắt đường tròn ngoại tiếp tam giác GEC và P khác E . Chứng minh rằng các điểm A , P , G , Q , F cùng thuộc một đường tròn.

Bài 13. Cho 19 điểm nằm trong hay trên cạnh của một lục giác đều cạnh bằng 4 cm. Chứng minh rằng luôn tồn tại 2 trong số 19 điểm đã cho mà khoảng cách giữa chúng không vượt quá $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm.

Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ vuông góc tại A và B , M là trung điểm của AB . Đường thẳng qua A vuông góc với MD cắt đường thẳng qua B vuông góc với MC tại N . Chứng minh



Suy ra: $\triangle ACD \sim \triangle BDN$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AC}{BD} = \frac{CD}{DN} \Rightarrow AC \cdot DN = BD \cdot CD$

Bài 2.

a) Áp dụng hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung, ta có:

$$\widehat{CAB} = \widehat{ADB}, \widehat{ACD} = \widehat{BAD}$$

Suy ra: $\triangle ABD \sim \triangle CBA$ (g.g).

b) Vì $\triangle ABD \sim \triangle CBA$, suy ra: $\frac{AD}{CA} = \frac{BD}{BA}$

$$\text{Mà } DQ = \frac{AD}{2}; AP = \frac{AC}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{DQ}{AP}$$

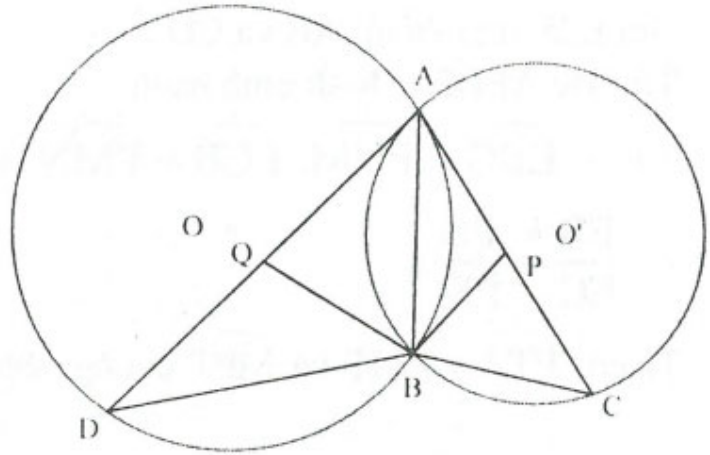
$$\text{Lại có: } \widehat{QDB} = \widehat{PAB}$$

Suy ra: $\triangle BQD \sim \triangle APB$ (c.g.c)

$$\Rightarrow \widehat{BQD} = \widehat{APB}.$$

c) Ta có: $\widehat{AQB} + \widehat{BQD} = 180^\circ$, mà $\widehat{BQD} = \widehat{APB} \Rightarrow \widehat{AQB} + \widehat{APB} = 180^\circ$

Suy ra tứ giác APBQ nội tiếp.



Bài 3.

a) Gọi O_1 ; T ; O_2 thẳng hàng.

Các tam giác cân O_1MB và O_2MN có chung góc M suy

ra $\Delta O_1MB \sim \Delta O_2MN$

$$\Rightarrow \frac{MB}{MN} = \frac{MO_1}{MO_2}$$

Tương tự suy ra $\Delta O_1MA \sim \Delta O_2MP$

$$\Rightarrow \frac{MA}{MP} = \frac{MO_1}{MO_2}$$

$$\text{Vậy } \frac{MB}{MN} = \frac{MA}{MP} \Rightarrow AB \parallel PN$$

Tương tự ta có $CD \parallel PM$.

Gọi E là giao điểm AB và CD.

Tứ giác AEDP là hình bình hành.

Tacó: $\widehat{EBC} = \widehat{PNM}$; $\widehat{ECB} = \widehat{PMN}$ nên $\Delta EBC \sim \Delta PNM$ (g.g) (1)

$$\Rightarrow \frac{EB}{EC} = \frac{PN}{PM}$$

Ta có: $\widehat{PTA} = \widehat{PMT}$ và $\widehat{MPT}$ chung, nên $\Delta PAT \sim \Delta PTM$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{PA}{PT} = \frac{PT}{PM} \Rightarrow PA \cdot PM = PT^2$$

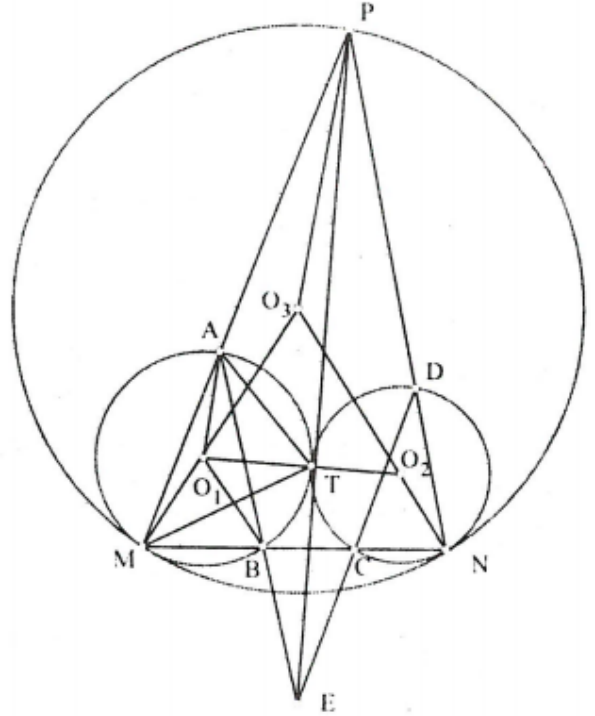
Tương tự, ta có: $PD \cdot PN = PT^2$

$$\Rightarrow PA \cdot PM = PD \cdot PN \text{ nên } \Delta PNM \sim \Delta PAD \text{ (c.g.c) (2)}$$

Mà APDE là hình bình hành nên $\Delta EDA = \Delta PAD$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra: $\Delta EBC \sim \Delta EDA \Rightarrow \widehat{EBC} = \widehat{EDA}$

Do đó tứ giác ABCD nội tiếp,



b) Gọi giao điểm của PT và AB là I. Tia IC cắt (O_2) tại D'

Ta có: $IA.IB = IT^2 = IC.ID' \Rightarrow \widehat{IBC} = \widehat{ID'A}$

Do đó tứ giác $ABCD'$ nội tiếp mà ABCD nội tiếp nên D trùng D'

Vậy các đường thẳng AB, CD và PT đồng quy.

Bài 4.

a) Ta có EB, EM là tiếp tuyến nên $\widehat{EOM} = \frac{1}{2}\widehat{BOM}$;

Ta có FC, FM là tiếp tuyến nên $\widehat{FOM} = \frac{1}{2}\widehat{COM} \Rightarrow \widehat{EOF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$;

Mặt khác $\widehat{EOF} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} \left(= \frac{1}{2}sd\widehat{BMC} \right)$

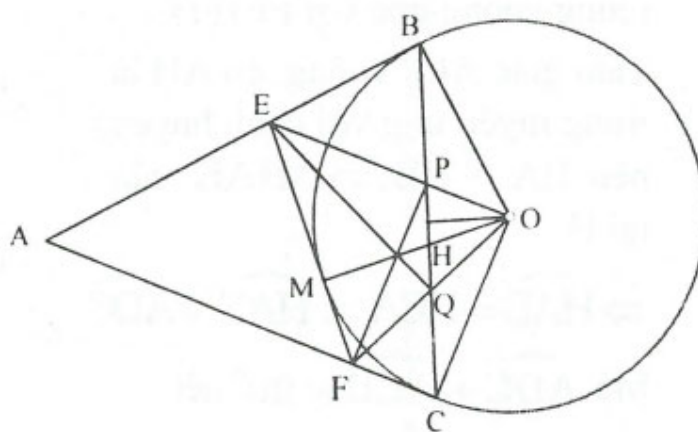
Suy ra $\widehat{EBQ} = \widehat{EOQ}$

Từ đó ta có O và B là hai đỉnh liên tiếp cùng nhìn EQ dưới một góc bằng nhau

Vậy OBEQ là tứ giác nội tiếp.

Chứng minh tương tự ta có OCFP là tứ giác nội tiếp.

b) OBEQ là tứ giác nội tiếp nên



$$\widehat{OBE} + \widehat{OQE} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OQE} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FQE} = 90^\circ.$$

$$\text{OCFP là tứ giác nội tiếp nên } \widehat{OCF} + \widehat{OPF} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{OPF} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{EPF} = 90^\circ$$

$$\text{Suy ra } \widehat{EPF} = \widehat{EQF} = 90^\circ.$$

Vậy tứ giác PQFE là tứ giác nội tiếp.

c) Kẻ OH vuông góc với BC.

Ta có: PQFE là tứ giác nội tiếp

Suy ra $\widehat{OPQ} = \widehat{EFO}$

Do đó $\triangle OPQ \sim \triangle OFE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{OH}{OM}$

Vì điểm A và (O) cố định nên OH và OM không đổi do đó tỉ số $\frac{PQ}{FE}$ không đổi khi M di chuyển trên đường tròn.

Bài 5. Tứ giác ADOE nội tiếp $\Rightarrow \widehat{EAO} = \widehat{EDO}$.

Gọi tia BO cắt tia DE tại H thì:

$$\widehat{BHD} = 180^\circ - \widehat{HDB} - \widehat{HBD} = 180^\circ - 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} - \frac{\widehat{B}}{2} = \frac{\widehat{C}}{2}$$

Mặt khác $\widehat{ACO} = \frac{\widehat{C}}{2}$ nên tứ giác EOCH nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{OHC} = \widehat{OEC} = 90^\circ.$$

Hay BH vuông góc với CH.

Gọi M là trung điểm của BC

Suy ra $MB = MC = MH \Rightarrow \triangle BHM$ cân

$$\Rightarrow \widehat{HBM} = \widehat{MHB} \Rightarrow \widehat{ABH} = \widehat{MHB}$$

Suy ra BH song song với AB.

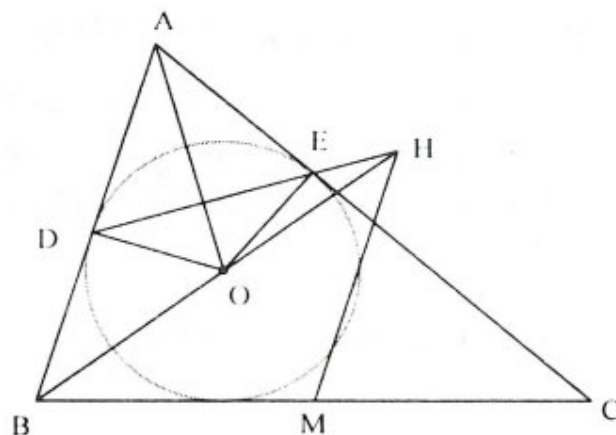
Suy ra điều phải chứng minh.

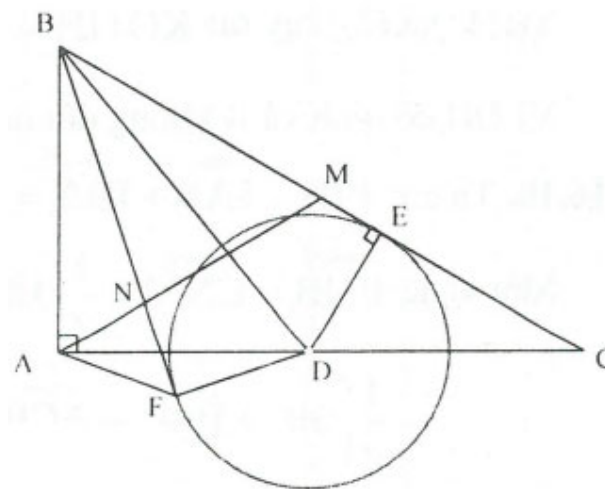
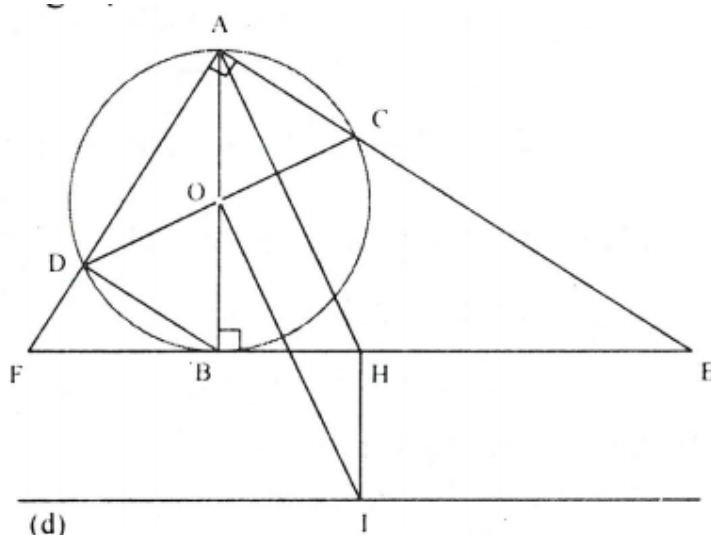
Bài 6.

1. Ta có: $\widehat{ACD} = \widehat{ABD}$; $\widehat{ABD} = \widehat{AFB}$ nên $\widehat{ACD} = \widehat{AFB}$.

Do đó tứ giác CDFE nội tiếp.

2. Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác CDFE.





$$\text{Xét: } \widehat{NAF} = \widehat{MAC} + \widehat{DAF} = \widehat{MCA} + \widehat{DBF} = \widehat{MCA} + \widehat{DBE} = \widehat{BDA} = \widehat{NFA}$$

$$\Rightarrow \triangle NAF \text{ cân tại N} \Rightarrow NF = NA.$$

Bài 8.

a) Ta có $\widehat{BDE} = \widehat{BAE}$ (cùng chắn cung BE của đường tròn tâm O)

$\widehat{BDE} = \widehat{BMN}$ (cùng chắn cung BN của đường tròn tâm O')

$\Rightarrow \widehat{BDE} = \widehat{BMN}$ hay $\widehat{BDI} = \widehat{BMN} \Rightarrow$ Tứ giác BDMI nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{MDI} = \widehat{MBI}$ (cùng chắn cung MI)

Mà $\widehat{MDI} = \widehat{ABE}$ (cùng chắn cung AE của đường tròn tâm O)

$\Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{MBI}$

Mặt khác: $\widehat{BMI} = \widehat{BAE}$

$\Rightarrow \triangle MBI \sim \triangle ABE$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{MI}{AE} = \frac{BI}{BE} \Rightarrow MI \cdot BE = BI \cdot AE$$

b) Gọi Q là giao điểm của CO và DE.

Ta có $OC \perp DE$ tại Q

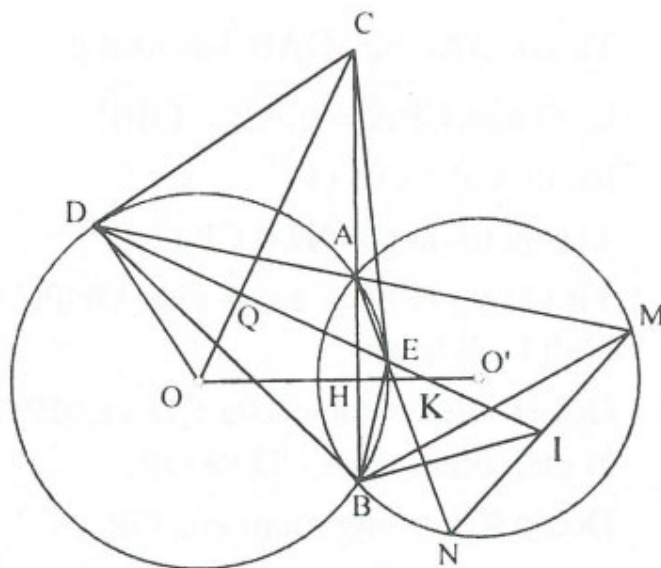
$$\Rightarrow \triangle OCD \text{ vuông tại D, có đường cao là DQ nên } OQ \cdot OC = OD^2 = R^2 \quad (1)$$

Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OO' và DE, H là giao điểm của AB và OO'

Ta có: $OO' \perp AB$ tại H. $\triangle KQO \sim \triangle CHO$ ($\widehat{Q} = \widehat{H} = 90^\circ$; $\widehat{O}$ chung)

$$\Rightarrow \frac{KO}{CO} = \frac{OQ}{OH} \Rightarrow OC \cdot OQ = KO \cdot OH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2), suy ra: } KO \cdot OH = R^2 \Rightarrow OK = \frac{R^2}{OH}$$



Do AB cố định nên điểm M thuộc đường tròn tâm I đường kính AB.

Ta có: $\widehat{ACP} = \widehat{BDP} = \widehat{AOB} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{AMP} = \frac{1}{2} \widehat{ACP} = 45^\circ$ (Góc nội tiếp và góc tâm của (C))

$\Rightarrow \widehat{BMP} = \frac{1}{2} \widehat{BCP} = 45^\circ$ (góc nội tiếp và góc ở tâm của (D))

Do đó MP là tia phân giác của $\widehat{AMB}$. Mà $\widehat{AMB} = \widehat{AOB} = 90^\circ$ nên M thuộc đường tròn (I) ngoại tiếp tam giác AOB. Giả sử MP cắt đường tròn (I) tại N và N là trung điểm cung AB không chứa điểm O nên N cố định.

c) Ta có: $\widehat{MPA} = \widehat{BPN}$; $\widehat{AMP} = \widehat{PBN}$ (góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Do đó $\triangle MAP \sim \triangle BNP$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{PA}{PN} = \frac{PM}{PB} \Leftrightarrow PM \cdot PN = PA \cdot PB \leq \left(\frac{PA + PB}{2} \right)^2 = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2} \text{ (không đổi)}$$

Vậy PM.PN lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB. Tam giác AMB vuông tại M nên:

$$S_{AMB} = \frac{1}{2} AM \cdot BM \leq \frac{1}{4} (AM^2 + BM^2) = \frac{AB^2}{4} = \frac{R^2}{2}$$

Vậy S_{ABM} lớn nhất là $\frac{R^2}{2}$ khi $PA = PB$ hay P là trung điểm của dây AB.

Bài 10.

a) EF là đường kính nên $\widehat{EAF} = 90^\circ$

Mà $AE \perp MN$ suy ra $AF \parallel MN \Rightarrow \widehat{QPN} = \widehat{QFA}$.

Mà AFQB nội tiếp nên $\widehat{QFA} + \widehat{QBA} = 180^\circ$

$$\Rightarrow \widehat{QPN} + \widehat{QBN} = 180^\circ.$$

Suy ra tứ giác PQBN nội tiếp.

$$\text{Lại có } \widehat{QCA} = \widehat{QFA} \Rightarrow \widehat{QPN} = \widehat{QCM}$$

Suy ra tứ giác PQCM nội tiếp.

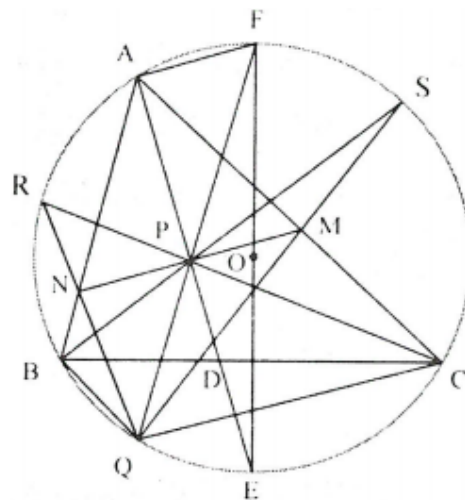
b) Giả sử QN và PC cắt nhau tại R thuộc (O).

Từ tứ giác PQBN nội tiếp suy ra $\widehat{NPB} = \widehat{NQB} = \widehat{BCP}$.

Từ tứ giác PMCQ nội tiếp ta có:

$$\widehat{PBC} = \widehat{RPB} - \widehat{PCB} = \widehat{RPN} + \widehat{NPB} - \widehat{NPB} = \widehat{RPN} = \widehat{MPC} = \widehat{MQC}$$

Từ đó nếu QM cắt BP tại điểm S thì SBQC nội tiếp hay S thuộc đường tròn (O).



Bài 11.

a) Ta có: $\widehat{BKA} = \widehat{ACB}$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

Mà $\widehat{ACB} = \widehat{BHK}$ (cùng phụ với góc EBC) $\Rightarrow \widehat{BKA} = \widehat{BHK}$

$\Rightarrow$ tam giác BHK cân $\Rightarrow BH = BK$

Lập luận tương tự ta có $CH = CK$

$\Rightarrow$ BC là trung trực của HK.

Ta có: $\widehat{AEH} = \widehat{AFH} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác AFHE nội tiếp.

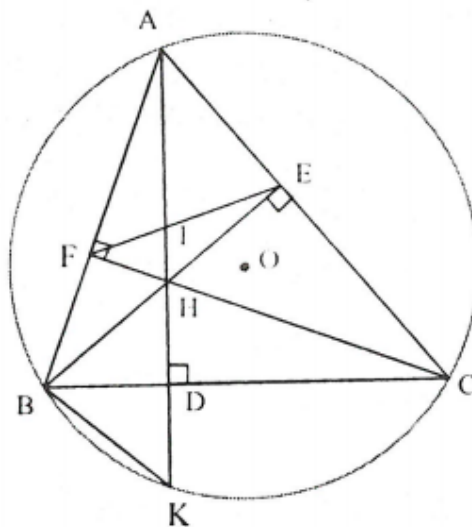
Xét tam giác AIE và tam giác FIH ta có:

$$\widehat{AIE} = \widehat{FIH} \text{ (2 góc đối đỉnh),}$$

$$\widehat{IAE} = \widehat{IFH} \text{ (Tứ giác AFHE nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle FIH \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{AI}{EI} = \frac{FI}{HI} \Rightarrow AI.HI = EI.FI$$

b) Xét tứ giác DHEC ta có: $\widehat{HDC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác DHEC nội tiếp.



Xét tứ giác BFEC ta có: $\widehat{BFC} = \widehat{BEC} = 90^\circ \Rightarrow$ Tứ giác BFEC nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ mà $\widehat{ACB} = \widehat{AKB}$ (chứng minh trên)

$\Rightarrow \widehat{AFE} = \widehat{AKB} \Rightarrow$ Tứ giác KBFI nội tiếp.

c) Theo như trên ta đã có: $\widehat{BKH} = \widehat{BHK}$ mà $\widehat{BHK} = \widehat{IHE}$ (2 góc đối đỉnh) $\Rightarrow \widehat{BKH} = \widehat{IHE}$.

Xét tam giác HEI và tam giác KAB ta có:

$\widehat{BKH} = \widehat{IHE}$ (cmt), $\widehat{IHE} = \widehat{BAK}$ (tứ giác AFHE nội tiếp)

$\Rightarrow \Delta HEI \sim \Delta KAB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{KB}{AB} = \frac{HI}{EI}$

Chứng minh tương tự ta có: $\frac{KC}{AC} = \frac{HI}{FI}$

Từ đó suy ra $\frac{KB}{AB} + \frac{KC}{AC} = HI \left(\frac{1}{EI} + \frac{1}{FI} \right) = IH \cdot \frac{EI + FI}{EI \cdot FI} = \frac{IH \cdot EF}{AI \cdot HI} = \frac{EF}{AI}$

(theo chứng minh ở câu a có $IF \cdot IE = IH \cdot IA$).

d) Ta có: $\widehat{BME} = \widehat{BKH}$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK \parallel ME$)

Mà $\widehat{BKH} = \widehat{BHK}$; $\widehat{BKH} = \widehat{BME}$ (2 góc ở vị trí đồng vị do $HK \parallel ME$)

$\Rightarrow \widehat{BME} = \widehat{BEM} \Rightarrow$ Tam giác BEM là tam giác cân.

Ta có: $AD \perp BC$ mà $EM \parallel BC \Rightarrow EM \perp BC$.

Trong tam giác cân BEM có BC là đường cao của tam giác (do $BC \perp ME$)

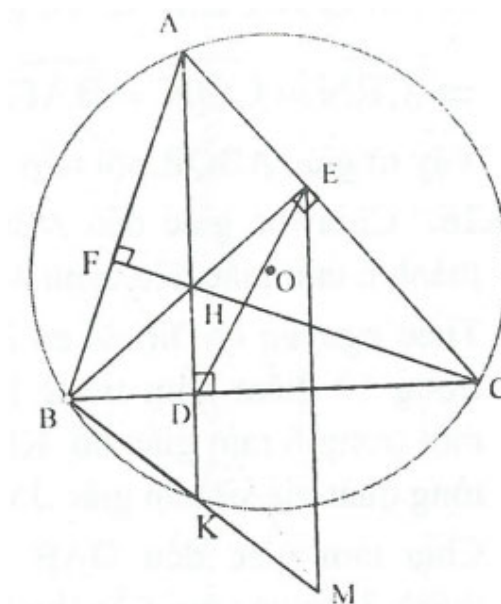
$\Rightarrow BC$ là trung trực của ME.

Ta có D nằm trên đường trung trực của ME $\Rightarrow DM = DE$

$\Rightarrow$ Tam giác DME là tam giác cân

$\Rightarrow \widehat{MDC} = \widehat{EDC}$.

Xét tứ giác ABDE ta có: $\widehat{ADB} = \widehat{AEB} = 90^\circ$



$\Rightarrow$ Tứ giác ABDE nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EDC} = \widehat{BAC}.$$

Xét tứ giác AFDC ta có: $\widehat{AFC} = \widehat{ADC} = 90^\circ$

$$\Rightarrow \text{Tứ giác AFDC nội tiếp} \Rightarrow \widehat{BAC} = \widehat{BDF}.$$

$$\text{Từ đó suy ra } \widehat{MDC} = \widehat{BDF}$$

$$\text{Ta có: } 180^\circ = \widehat{BDC} = \widehat{MDC} + \widehat{BDM} = \widehat{BDF} + \widehat{BDM} = \widehat{FDM}$$

$\Rightarrow$ Ba điểm F, D, M thẳng hàng.

Bài 12.

a) Ta có $\triangle ABF$; $\triangle ACE$ là các tam giác cân tại F và E

$$\text{Và } \widehat{FBA} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC} = \widehat{ECA} \Rightarrow \triangle ABF \sim \triangle ACE.$$

b) Gọi G là giao điểm của BE và CF.

$$\text{Ta có: } \frac{GF}{GC} = \frac{BF}{CE} = \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC}$$

$$\Rightarrow DG \parallel BF$$

Mặt khác $DA \parallel BF$ suy ra A, D, G thẳng hàng.

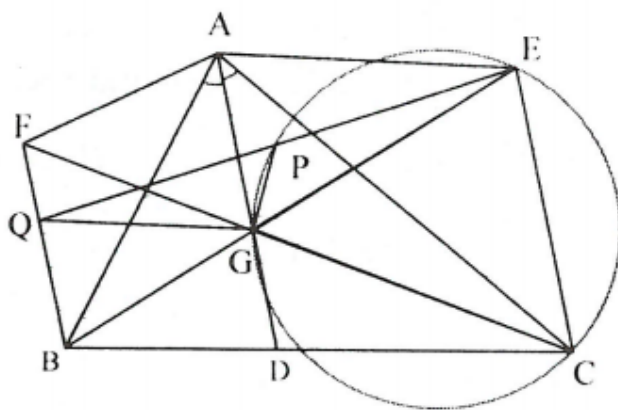
Suy ra điều phải chứng minh.

$$\text{c) Ta có } \widehat{BQG} = \widehat{QGA} = \widehat{GAE} = \widehat{GAC}$$

$$= \widehat{GAC} + \widehat{CAE} = \widehat{GAB} + \widehat{BAF} = \widehat{GAF}$$

Suy ra AGQF là tứ giác nội tiếp.

Mặt khác $\widehat{QPG} = \widehat{GCE} = \widehat{GFQ}$ nên QGPF là tứ giác nội tiếp. Suy ra điều phải chứng minh.



Bài 13. Chia lục giác đều ABCDEF tâm O thành 6 tam giác đều cạnh 4cm (hình vẽ).

Theo nguyên lý Diriclé có ít nhất 4 điểm trong 19 điểm nằm trong hay trên cạnh một trong 6 tam giác đó. Không mất tính tổng quát giả sử tam giác đó là OAB.

Chia tam giác đều OAB trọng tâm G thành 3 tứ giác nội tiếp (hình vẽ) với $GM \perp AB$; $GN \perp OB$; $GP \perp OA$.

ΔOAB đều cạnh bằng 4 có đường cao

$$\frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Rightarrow GA = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

Các tứ giác GMBN, GMAP, GPON nội tiếp trong đường tròn đường kính GB, GA, GO đều bằng $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

Theo nguyên lý Diriclé có ít nhất 2 điểm trong 4 điểm đang xét nằm trong hay trên cạnh một trong 4 tứ giác nói trên, giả sử tứ giác đó là GMBN

$\Rightarrow$ khoảng cách giữa hai điểm đó không vượt quá đường kính $GB = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $\Rightarrow$ điều phải chứng minh.

Bài 14.

a) Ta có E, M, O, F thẳng hàng, $ME = MF$ (E, F đối xứng qua M) $EF \perp BC$

$$\Rightarrow \Delta BEF \text{ cân tại B} \Rightarrow \widehat{BFE} = \widehat{FEB}.$$

Mặt khác $OB = OE$ suy ra ΔOBE cân tại O

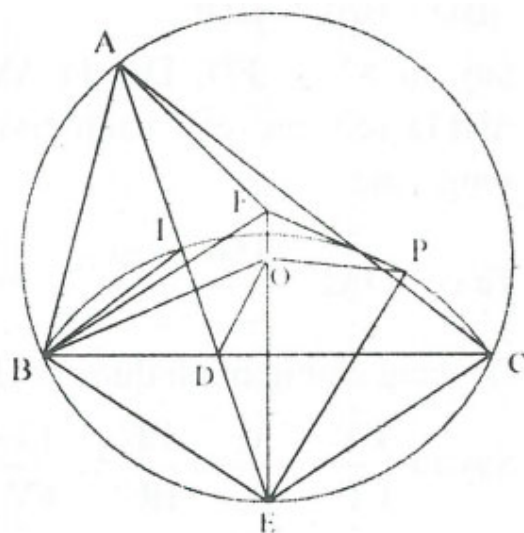
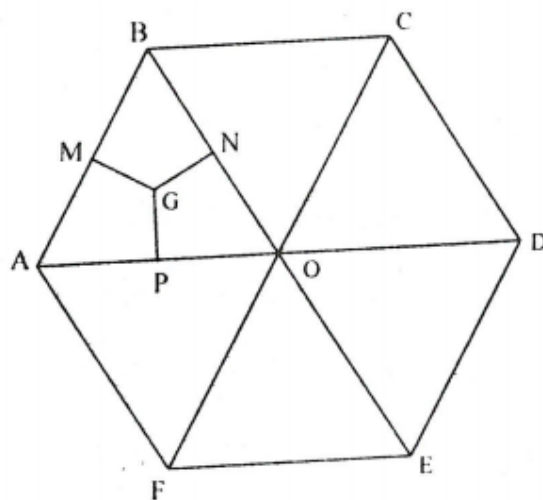
$$\Rightarrow \widehat{OBE} = \widehat{OEB}.$$

$$\text{Ta có } \widehat{BFE} = \widehat{FEB} = \widehat{OBE}$$

$$\Rightarrow \Delta BEF \sim \Delta OBE \text{ (g.g)}$$

$$\Rightarrow \frac{EB}{OB} = \frac{EF}{EB} \Rightarrow EB^2 = EF \cdot EO$$

b) Không giảm tính tổng quát xét O nằm giữa M và F.



$$\text{Dễ thấy } \triangle FBD \sim \triangle EAB \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{EB}{EA} = \frac{ED}{EB} \Rightarrow EB^2 = ED.EA$$

$$\text{Ta có } ED.EA = EF.EO (= EB^2) \Rightarrow \frac{EO}{EA} = \frac{ED}{EF}.$$

$$\text{Xét } \triangle EOD \text{ và } \triangle EAF \text{ có } \frac{EO}{EA} = \frac{ED}{EF}, \widehat{OED} \text{ chung} \Rightarrow \triangle EOD \sim \triangle EAF \text{ (c.g.c)}$$

$\Rightarrow \widehat{EOD} = \widehat{EAF}$, dẫn đến tứ giác DAFO nội tiếp. Vậy các điểm A, D, O, F cùng thuộc một đường tròn.

$$\text{c) Ta có } \widehat{EIB} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI}, \widehat{ABI} = \widehat{IBC}, \widehat{BAI} = \widehat{CBE} (\widehat{EB} = \widehat{EC})$$

$$\Rightarrow \widehat{EBI} = \widehat{IBC} + \widehat{CBE} = \widehat{ABI} + \widehat{BAI} = \widehat{EIB} \Rightarrow \triangle EBI \text{ cân tại E} \Rightarrow EB = EI$$

Mà $EB = EC$ nên $EB = EI = EC \Rightarrow E$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác IBC.

$$\text{Do đó } EP = EB \text{ nên } EP^2 = EF.EO.$$

$$\text{Xét } \triangle EPO \text{ và } \triangle EFP \text{ có } \frac{EP}{EF} = \frac{EO}{EP}, \widehat{PEO} \text{ chung} \Rightarrow \triangle EPO \sim \triangle EFP \text{ (c.g.c)}$$

$$\Rightarrow \widehat{EPO} = \widehat{EFP} \Rightarrow EP \text{ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF.}$$

Vậy tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác POF đi qua điểm E cố định.

D. PHIẾU BÀI TỰ LUYỆN CƠ BẢN NÂNG CAO

Bài 1: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) có $\widehat{A} = 120^\circ, \widehat{B} = 100^\circ$. Tính $\widehat{C}, \widehat{D}$.

Bài 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) vẽ dây DE vuông góc với OA cắt các cạnh AB, AC lần lượt S, K.

Chứng minh rằng: tứ giác BCKS nội tiếp.

Bài 3: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) vẽ Ax là tiếp tuyến của đường tròn (O).

Đường thẳng song song với Ax cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại D, E.

Chứng minh rằng tứ giác BCED nội tiếp.

Bài 4: Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) và $AB = BD$. Tiếp tuyến của O tại A cắt đường thẳng BC tại Q. Gọi R là giao điểm của hai đường thẳng AB và DC.

a) Chứng minh tứ giác AQRC nội tiếp được trong đường tròn.

b) Chứng minh $AD \parallel QR$.

Bài 5: Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp trong đường tròn (O) đường kính là AI . Gọi E là trung điểm AB và K là trung điểm của OI .

a) Chứng minh tam giác EKB là tam giác cân.

b) Chứng minh tứ giác $AEKC$ là một tứ giác nội tiếp được.

Bài 6: Gọi M là một điểm bất kỳ trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$; P, Q, R lần lượt là hình chiếu của M trên các đường thẳng BC , CA và AB .

Chứng minh rằng:

a) Các điểm M, B, P, R cùng thuộc một đường tròn.

b) Các điểm R, P, Q thẳng hàng.

Bài 7: Từ một điểm A ở ngoài đường tròn (O) , kẻ các tiếp tuyến AB, AC với đường tròn (B, C là các tiếp điểm). Trên tia đối của BC lấy điểm D . Gọi E là giao điểm của DO và AC . Qua E vẽ tiếp tuyến thứ hai với đường tròn (O) , tiếp tuyến này cắt đường thẳng AB ở K .

Chứng minh bốn điểm D, B, O, K cùng thuộc một đường tròn.

Bài 8: Cho đường tròn (O) , nội tiếp tam giác ABC , D, E, F lần lượt là các điểm tiếp xúc của (O) với BC, CA, AB . Vẽ $BB_1 \perp OA (B_1 \in OA)$, $AA_1 \perp OB (A_1 \in OB)$. Chứng minh rằng D, B_1, A_1, E thẳng hàng.

Bài 9: Tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . M là một điểm bất kỳ thuộc cạnh đáy BC . Vẽ đường tròn đi qua B và M đồng thời tiếp xúc với AB tại B . Vẽ đường qua C và M tiếp xúc với AC tại C . Hai đường tròn này cắt nhau tại điểm N (khác M). Chứng minh rằng:

a) N thuộc đường tròn tâm O

b) Khi M di động trên cạnh BC thì đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 10: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . E trên đường chéo BD sao cho $\widehat{BAE} = \widehat{CAD}$

a) Chứng minh $\triangle BAE \sim \triangle CAD$

b) $AB \cdot CD + BC \cdot AD = AC \cdot BD$

Bài 11: Cho tam giác ABC , kẻ đường cao AH . Gọi H_1, H_2 là điểm đối xứng của H lần lượt qua AB và AC . Đường thẳng H_1H_2 cắt AB và AC lần lượt tại K và I .

Chúng tỏ rằng: AH, BI và CK đồng quy.

Bài 12: Cho hình vuông $ABCD$, góc $\widehat{xAy} = 45^\circ$. Ax cắt BC và BD lần lượt tại E và F . Ay cắt CD, BD lần lượt tại G và H .

Chúng minh tứ giác $EFHG$ nội tiếp.

Bài 13: Bốn đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn tam giác.

Chúng minh rằng bốn đường tròn ngoại tiếp của bốn tam giác này có chung một điểm (Điểm Miquel).

Bài 14: Cho đường tròn (O) , dây AB không qua O . Gọi I là trung điểm của AB . Qua I kẻ hai dây cung CD và EF (C và E cùng thuộc một cung AB). CF và ED cắt nhau theo thứ tự ở M và N . Chứng minh $IM = IN$.

Bài 15: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn (O) . Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BCD, CDA, DAB . Chứng minh $EFGH$ là một hình chữ nhật.

Bài 16: Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp đường tròn $(O; R)$ có $CD = AD + BC$ ($BC > AD$). Chứng minh rằng hai tia phân giác của hai góc $\widehat{DAB}$ và $\widehat{ABC}$ cắt nhau tại một điểm thuộc cạnh D .

Bài 17: Cho tứ giác nội tiếp đường tròn (O) có AD cắt BC tại E và AC cắt BD tại F . Chứng minh rằng $EA.ED + FA.FB = EF^2$.

HƯỚNG DẪN

Bài 1:

Tứ giác $ABCD$ nội tiếp (gt)

$$\Rightarrow \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} + \widehat{D} = 180^\circ$$

$$\text{Mà } \widehat{A} = 120^\circ \text{ (gt), } \widehat{B} = 100^\circ \text{ (gt)}$$

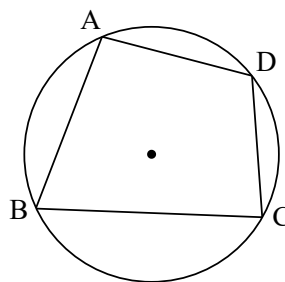
$$\text{Do đó: } \widehat{C} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\widehat{D} = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Bài 2:

$$OA \perp DE \text{ (gt)} \Rightarrow \widehat{xAc} = \widehat{AED}$$

$$\Rightarrow AD = AE$$



$$\widehat{BSK} = \frac{sđ\widehat{BCE} + sđ\widehat{AD}}{2} \text{ (góc có 2 đỉnh ở bên trong đường tròn)}$$

$$\widehat{BSK} = \frac{sđ\widehat{AB}}{2} \text{ (góc nội tiếp)}$$

$$\text{Do đó: } \widehat{BSK} + \widehat{BCK} = \frac{sđ\widehat{BCE} + sđ\widehat{AD} + sđ\widehat{AB}}{2}$$

$$= \frac{sđ\widehat{BCE} + sđ\widehat{AE} + sđ\widehat{AB}}{2} = \frac{360^0}{2} = 180^0$$

$\Rightarrow$ Tứ giác nội $BCKS$ nội tiếp.

Bài 3:

$$Ax \parallel DE(gt) \Rightarrow \widehat{xAC} = \widehat{ACD}$$

(hệ quả của góc tạo bởi tia

tiếp tuyến dây cung)

$$\text{Do đó: } \widehat{AED} = \widehat{DBC}$$

Suy ra tứ giác $BCED$ nội tiếp.

Bài 4:

$$\text{a) } \widehat{QCR} = \widehat{BAD} \text{ (vì tứ giác } ABCD \text{ nội tiếp)}$$

$$\widehat{QAR} = \frac{1}{2} sđ\widehat{AB} \text{ (}\widehat{QAR} \text{ là góc tạo bởi tia tiếp tuyến dây cung)}$$

$$\widehat{BAD} = \frac{1}{2} sđ\widehat{BD} \text{ (}\widehat{BAD} \text{ là góc nội tiếp)}$$

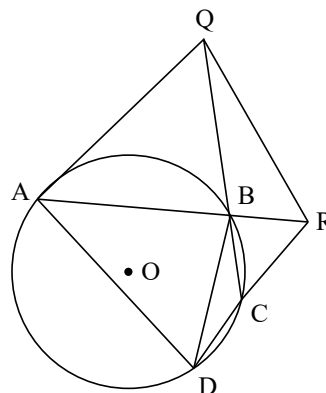
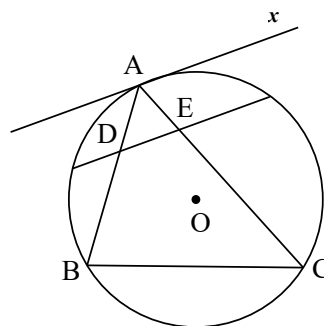
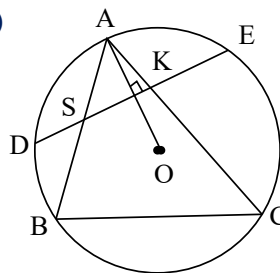
$$AB = BD$$

$$\Rightarrow \widehat{AB} = \widehat{BD}.$$

$$\text{Do đó: } \widehat{QCR} = \widehat{QAR}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AQRC$ nội tiếp được đường tròn.

$$\text{b) } \widehat{QCA} = \widehat{QCA} \text{ (tứ giác } AQRC \text{ nội tiếp)}$$



$$\widehat{BAD} = \widehat{QCA} \text{ (vì } AB = BD \text{)}$$

Suy ra: $\widehat{QRA} = \widehat{BAD}$ mà $\widehat{QRA}$ và $\widehat{BAD}$ so le trong

Do đó: $AD \parallel QR$.

Bài 5:

a) Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng BE

Ta có: E là trung điểm AB ,

AB không qua O (gt)

Mà $\widehat{ABI} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Vì $OE \perp AB, BI \perp AB (\widehat{ABI} = 90^\circ) \Rightarrow OE \parallel BI$

Do đó tứ giác $BEOI$ là hình thang.

Mà H, K lần lượt là trung điểm các cạnh BE, OI nên $HK \parallel OE$

Ta có: $HK \parallel OE, OE \perp AB$

$\Rightarrow HK \perp AB$

$\triangle EKB$ có HK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến

$\Rightarrow \triangle EKB$ cân tại K .

b) $OB = OC (= R)$ và $AB = AC$ (gt)

$\Rightarrow O$ và A thuộc đường trung trực của đoạn thẳng BC .

$\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

Mà $K \in OA$ nên $KB = KC$

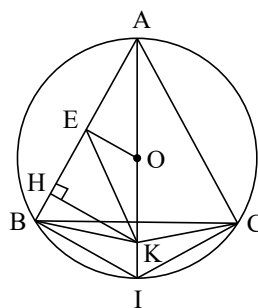
Xét $\triangle KBA$ và $\triangle KCA$ có: $AB = AC$ (gt)

$KB = KC; AK$ (cạnh chung)

Do đó: $\triangle KBA = \triangle KCA$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{KBI} = \widehat{KCA}$

$\Rightarrow \widehat{KBA} = \widehat{KEB}$ ($\triangle EKB$ cân tại K)



$\Rightarrow$ tứ giác $KBOM$ nội tiếp

$\Rightarrow K, O, M, B$ cùng thuộc một đường tròn (2)

Từ (1), (2) có 5 điểm D, K, O, M, B cùng thuộc đường tròn

$\Rightarrow D, O, K, B$ cùng thuộc một đường tròn

$\Rightarrow D, O, K, B$ cùng thuộc đường tròn.

Bài 8:

$\widehat{AEO} = 90^\circ$ (AE là tiếp tuyến của O nên $AE \perp OE$)

$(\widehat{AA_1O} = 90^\circ (AA_1 \perp OB))$

Ta có: $\widehat{AEO} = \widehat{AA_1O} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác AEA_1O nội tiếp được một đường tròn.

$\Rightarrow \widehat{OAE} + \widehat{OA_1E} = 180^\circ$

$\Rightarrow \widehat{AB_1B} = 90^\circ (BB_1 \perp OA)$

$\widehat{AB_1B} = \widehat{AA_1O} = 90^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác AA_1B_1B nội tiếp được một đường tròn

$\Rightarrow \widehat{BAB_1} = \widehat{BA_1B_1}$

Mà $\widehat{BAB_1} = \widehat{OAE}$ (vì O là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$)

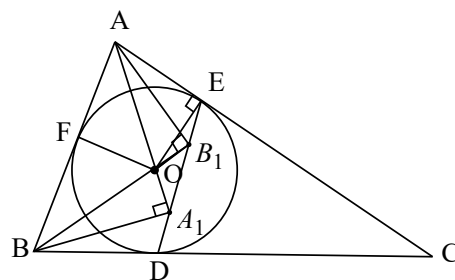
Do đó $\widehat{BAB_1} = \widehat{OA_1E}$

Ta có $\widehat{BAB_1} + \widehat{OA_1E} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Ba điểm E, A_1, B_1 thẳng hàng.

Do đó bốn điểm D, B_1, A_1, E thẳng hàng.

Bài 9:



- a) $\widehat{BNM} = \widehat{ABC}$ (hệ quả góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung)

Tương tự: $\widehat{CNM} = \widehat{ACB}$

$$\text{Mà } \widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180^\circ$$

Do đó tứ giác $ABNC$ nội tiếp đường tròn (O) hay N thuộc đường tròn (O) .

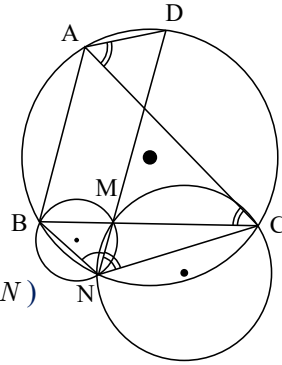
- b) Gọi D là giao điểm của MN và đường tròn (O) (D khác N)

Ta có: $\widehat{CAD} = \widehat{CND}$ (góc nội tiếp chắn cung CD)

Mà $\widehat{CND} = \widehat{ACB}$ (chứng minh câu a)

$$\Rightarrow \widehat{CAD} = \widehat{ACB} \quad A, B, C \text{ cố định.}$$

$\Rightarrow D$ cố định hay đường thẳng MN đi qua điểm cố định.



Bài 10:

- a) Xét $\triangle BAE$ và $\triangle CAD$ có:

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAD} \text{ (hai góc nối tiếp cùng chắn cung } \widehat{AD} \text{)}$$

$$\widehat{BAE} = \widehat{CAD} \text{ (gt)}$$

Do đó $\triangle BAE \sim \triangle CAD$

- b) Xét $\triangle EAD$ và $\triangle BAC$ có:

$$\widehat{EAD} = \widehat{BAC} \text{ (vì } \widehat{BAE} = \widehat{CAD} \text{)}$$

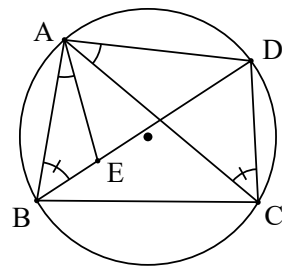
$$\widehat{ADE} = \widehat{ACB} \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } \widehat{AB} \text{)}$$

Do đó $\triangle EAD \sim \triangle BAC$

$$\Rightarrow \frac{AD}{AC} = \frac{DE}{BC}$$

$$\Rightarrow BC \cdot AD = AC \cdot DE$$

Từ $\triangle BAE \sim \triangle CAD$ (câu a)



$$CD \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BE}{CD} \Rightarrow AB.CD = AC.BE$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó: } AB.CD + BC.AD &= AC.BE + AC.DE \\ &= AC.(BE + DE) = AC.BD \end{aligned}$$

Bài 11:

Ta có: $\triangle AH_1H_2$ cân ($AH_1 = AH = AH_2$) $\Rightarrow \widehat{AH_1H_2} = \widehat{AH_2H_1}$

Ta cũng có: $\widehat{AH_2I} = \widehat{AHI}$ (vì H và H_2 đối xứng qua AC)

Vậy $\widehat{AH_1I} = \widehat{AHI}$.

H_1 và H cùng nằm phía của AI . Do đó H_1 và H nằm trên cung chứa góc dựng trên đoạn AI .

$\Rightarrow A, H_1, H, I$ cùng thuộc một đường tròn

Mặt khác:

H_1 và H đối xứng nhau qua AB

$$\Rightarrow \widehat{AH_1B} = \widehat{AHB} = 90^\circ$$

Do đó tứ giác AH_1BH nội tiếp trong đường tròn đường kính AB .

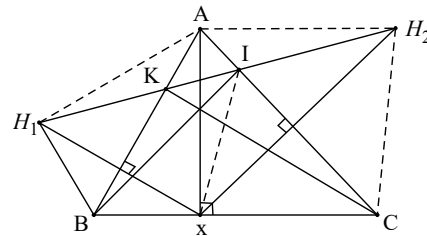
Từ đó ta có năm điểm A, H, B, H_1, I cùng thuộc

một đường tròn đường kính AB . $\widehat{BIA} = 90^\circ$

$\Rightarrow BI$ là đường cao của tam giác ABC .

Chứng minh tương tự CK là đường cao của tam giác ABC .

Vậy AH, BI, CK đồng quy.

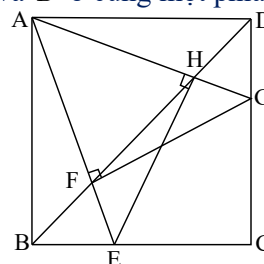


Bài 12:

$ABCD$ là hình vuông nên $\widehat{BDC} = 45^\circ$ lại có $\widehat{GAF} = 45^\circ$ (gt) A và D ở cùng một phía của GF nên

A, D nằm trên cung chứa góc 45° vẽ trên đoạn FG .

$\Rightarrow$ Tứ giác $ADGH$ nội tiếp, có $\widehat{ADG} = 90^\circ$ nên

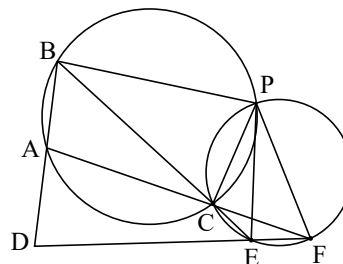


AG là đường kính của đường tròn $(ADGH)$.

Vì vậy $\widehat{AFG} = 90^\circ$ hay $\widehat{EFG} = 90^\circ$.

Chúng minh tương tự $\widehat{EHG} = 90^\circ$.

Vậy tứ giác $EFGH$ nội tiếp.



Bài 13:

Với giả thiết bốn đường thẳng cắt nhau tạo thành bốn tam giác nên không có ba đường thẳng nào trong chúng cắt nhau tại một điểm.

Giả sử các đường thẳng AB, BC, CA cắt đường thẳng thứ tư tại D, E, F (hình vẽ).

Gọi P ($P \neq C$) là giao điểm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tam giác ABC và CEF .

Ta có: $\widehat{BPE} = \widehat{BPC} + \widehat{CPE}$

Trong đó: $\widehat{BPC} = 180^\circ - \widehat{BAC} = \widehat{DAF}$; $\widehat{CPE} = \widehat{CFE}$

Suy ra: $\widehat{BPE} = \widehat{BPC} + \widehat{CPE} = \widehat{DAF} + \widehat{CFE} = 180^\circ - \widehat{ADE}$

$\Rightarrow \widehat{BPE} + \widehat{BDF} = 180^\circ$

$\Rightarrow$ Tứ giác $BPED$ nội tiếp

$\Rightarrow P$ nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác BDE .

Chúng minh tương tự: Điểm P nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ADF .

Bài 14:

Ta có: $\widehat{CFE} = \widehat{CDE}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{CE}$)

$\widehat{FCD} = \widehat{FED}$ (góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DF}$)

$$\text{Do đó } \triangle FIC \sim \triangle DIE \Rightarrow \frac{CI}{EI} = \frac{FC}{DE} \quad (1)$$

Vẽ OH, OK lần lượt vuông góc với CF và ED ($H \in CF, K \in ED$)

Ta có H, K lần lượt là trung điểm của FC và ED .

(Định lý đường kính vuông góc với dây cung).

$$\text{Do đó: } \frac{CI}{EI} = \frac{FC}{DE} = \frac{CH}{EK}$$

Xét $\triangle CHI$ và $\triangle EKI$ có:

$$\frac{CI}{EI} = \frac{CH}{EK}; \widehat{HCI} = \widehat{KEI}$$

$$\text{Do đó } \triangle CHI \sim \triangle EKI \Rightarrow \widehat{CHI} = \widehat{EKI} \text{ hay } \widehat{MHI} = \widehat{NKI} \quad (2)$$

Mặt khác I là trung điểm AB nên $OI \perp AB, OH \perp PC$

$\Rightarrow$ Tứ giác $OHMI$ nội tiếp đường tròn đường kính MO .

Ta có: $\widehat{MHI} = \widehat{MOI}$ (3) (góc nội tiếp cùng chắn cung MI)

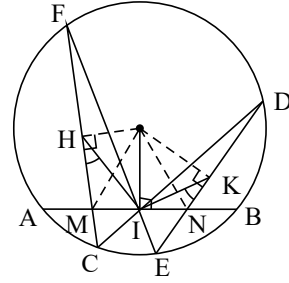
Tương tự: Tứ giác $OKNI$ nội tiếp đường tròn

$$\text{Nên: } \widehat{NKI} = \widehat{NOI} \quad (4)$$

Từ (2), (3) và (4) ta có: $\widehat{MOI} = \widehat{NOI}$

$\Rightarrow \triangle MON$ cân có OI là đường cao nên OI cũng là đường trung tuyến

Do đó $IM = IN$.



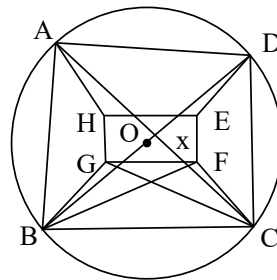
Bài 15:

Gọi tia đối của tia FC là tia Fx .

$$\widehat{GDC} = \frac{1}{2} \widehat{ADC}, \widehat{GCD} = \frac{1}{2} \widehat{ACD}$$

(G là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle CDA$)

$$\text{Do đó: } \widehat{GDC} + \widehat{GCD} = \frac{1}{2} (\widehat{ADC} + \widehat{ACD})$$



$$= \frac{1}{2}(180^0 - \widehat{DAC}) = 90^0 - \frac{1}{2}\widehat{DAC}$$

$$\Delta GDC \text{ có } \widehat{DGC} = 180^0 - (\widehat{GDC} + \widehat{GCD}) = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{DAC}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{DFC} = 90^0 + \frac{1}{2}\widehat{DBC}$$

Mà $\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung $\widehat{DC}$)

$$\text{Do đó: } \widehat{DGC} = \widehat{DFC}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $GFCD$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{GFx} = \widehat{GDC}$$

$$\text{Tương tự: } \widehat{xFE} = \widehat{EBC}$$

$$\text{Mà } \widehat{GDC} + \widehat{EBC} = \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \frac{1}{2}\widehat{ABC} = 90^0$$

Chứng minh tương tự ta có: $\widehat{HEF} = 90^0, \widehat{FGH} = 90^0$

Do đó tứ giác $EFGH$ là hình chữ nhật.

Bài 16:

Tia phân giác DAB cắt cạnh CD tại E .

Trên cạnh CD lấy F sao cho: $DF = AD$

Tam giác CBF cân tại C ($(CF = BC) \Rightarrow \widehat{BFC} = \frac{180^0 - \widehat{BCD}}{2}$)

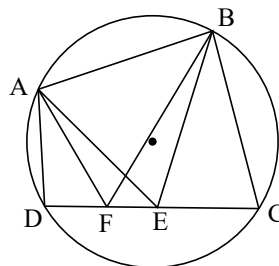
Tứ giác $ABCD$ nội tiếp nên:

$$\widehat{DAB} = \widehat{BCD} = \widehat{ABC} + \widehat{CAD} = 180^0$$

$$\text{Do đó: } \widehat{BFC} = \frac{\widehat{DAB}}{2}$$

$$\text{Mà } \widehat{EAB} = \frac{\widehat{DAB}}{2}$$

$$\text{Suy ra: } \widehat{BFC} = \widehat{EAB}$$



$$\Rightarrow \widehat{DAF} = \widehat{ABE} \quad (1)$$

Tam giác $\widehat{DAF}$ cân tại D ($DF = AD$) $\Rightarrow \widehat{AFD} = \frac{180^\circ - \widehat{CDA}}{2}$

$$\text{Nên } \widehat{AFD} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có } \widehat{ABE} = \frac{\widehat{ABC}}{2} \Rightarrow \widehat{ABE} = \widehat{EBC}$$

Vậy BE là tia phân giác của góc $\widehat{ABC}$. Do đó hai tia phân giác của hai góc DAB và ABC cắt nhau tại điểm E thuộc cạnh CD .

Bài 17:

Gọi M trên cạnh EF sao cho $\widehat{FBM} = \widehat{AEF}$

Xét $\triangle FBM$ và $\triangle FEA$ có $\widehat{FBM}$ (chung), $\widehat{FBM} = \widehat{AEF}$

Do đó $\triangle FBM \sim \triangle FEA$

$$\Rightarrow \frac{FB}{EF} = \frac{FM}{FA}$$

$$\Rightarrow FA.FB = EF.FM$$

$$\widehat{FBM} = \widehat{AEF}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $AEMB$ nội tiếp

$$\Rightarrow \widehat{EMA} = \widehat{EBA}$$

Mà $\widehat{EDF} = \widehat{EBA}$ (tứ giác $ABCD$ nội tiếp)

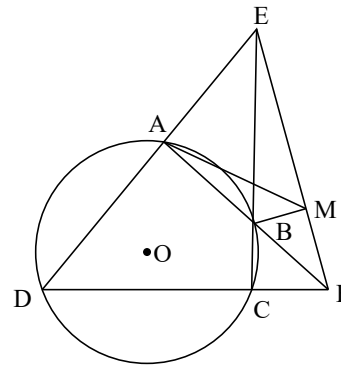
$$\text{Do đó: } \widehat{EMA} = \widehat{EDF}$$

Xét $\triangle EMA$ và $\triangle EDF$ có $\widehat{EMA} = \widehat{EDF}$, $\widehat{AEM}$ (chung)

Do đó $\triangle EMA \sim \triangle EDF$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EF} = \frac{EM}{ED}$$

$$\Rightarrow EA.ED = EF.EM$$



Vậy $EA.ED + AF.FB = EF.EM + EF.FM = EF(EM + FM) = EF^2$.

-----**Toán Học Sơ Đồ**-----